

# [ 선형대수학 AI 튜터 ] 9월 리포트

## 중간·기말고사 문제 유형별 정답률 및 성적 분포 분석

2026년 1학기 선형대수학 시험 풀이 데이터 기반 분석

작성자: 김보성, 박성민, 조세정 | 한림대학교 글로벌대학30 AI에듀테크센터 | 2026년 9월

### I. 서론

#### i. 리포트의 배경 및 목적

본 9월 리포트는 한림대학교 글로벌대학30 사업 '선형대수학 AI 튜터 학습 데이터를 활용한 AI 튜터 성능 향상 연구'의 9월 정기 진행 사항을 정리한 것입니다. 본 리포트는 2026년 1학기 중간고사 및 기말고사의 실제 답안지와 최종 성적 데이터를 결합하여 문제 유형별 정답률, 점수 분포, 학점 현황을 정량적으로 분석합니다.

본 리포트는 공식 지필 시험 결과를 통해 실제 학업 성취를 직접적으로 평가합니다. 특히 중간고사(평균 36.4점)와 기말고사(평균 10.5점) 사이의 극적인 점수 차이가 어떤 문제 유형에서 기인하는지, 전반부 기초 개념과 후반부 심화 개념 간의 성취 편차가 어느 수준인지를 분석하는 것이 본 리포트의 핵심 목표입니다.

#### ii. 분석 데이터 개요

| 자료       | 내용                       | 분석 활용                 |
|----------|--------------------------|-----------------------|
| 중간고사 시험지 | 응시인원 35명                 | 문항별 출제 유형·배점 파악       |
| 기말고사 시험지 | 응시인원 33명                 | 문항별 출제 유형·배점 파악       |
| 최종 성적표   | 36명 전체 중간·기말·과제·출석·합계·학점 | 점수 분포, 상관관계, 학점 분포 분석 |
| 분석 제외    | 결시·미응시(중간 1명, 기말 3명)     | 통계 계산 시 해당 학생 제외      |

### II. 본론

#### i. 중간·기말고사 문항 구성 개요

중간고사는 총 6문항 100점 만점으로 구성되었습니다. 행렬 분해(QR분해, 20점)부터 역행렬(10점), 행렬식(10점), 연립방정식의 가우스 소거법(20점), 크래머 공식(20점), 정사영과 내적기하(20점)까지, 학기 전반부(3~7주차)에서 다룬 핵심 개념을 고르게 출제하였습니다. 배점의 80%(80점)가 20점짜리 4개 문항에 집중되어 있어, 단일 문항 실패가 성적에 미치는 영향이 큰 구조입니다.

| 번호  | 문제 내용                                     | 유형     | 배점  | 핵심 개념          |
|-----|-------------------------------------------|--------|-----|----------------|
| 문제1 | 행렬 A를 QR분해 하시오                            | 행렬 분해  | 20점 | QR분해           |
| 문제2 | 행렬 A의 역행렬을 계산하시오                          | 역행렬    | 10점 | 여인수 행렬·행렬식     |
| 문제3 | 행렬 A의 행렬식을 구하시오                           | 행렬식    | 10점 | 여인수 전개         |
| 문제4 | 연립방정식 풀기 ( $A \rightarrow \text{REF}$ 변환) | 연립방정식  | 20점 | 가우스 소거, 첨가행렬   |
| 문제5 | 연립방정식 크래머 공식으로 계산                         | 크래머 공식 | 20점 | 행렬식 반복 계산      |
| 문제6 | 정사영·직교분해 벡터 계산                            | 정사영/내적 | 20점 | 내적, 단위벡터, 직교투영 |

기말고사는 총 5문항 100점 만점으로 구성되었으며, 전 문항이 20점 배점의 균등 구조입니다. 중간고사 6번 문항(정사영)이 1번으로 재출제되어 학생들에게 복습 기회를 제공한 반면, 나머지 4문항은 그람-슈미트 정규직교화, QR분해(중간 1번 응용), 선형변환 표현행렬, 고유값·고유벡터 및 대각화로 구성되어 후반부(9~14주차) 심화 개념을 집중적으로 평가하였습니다.

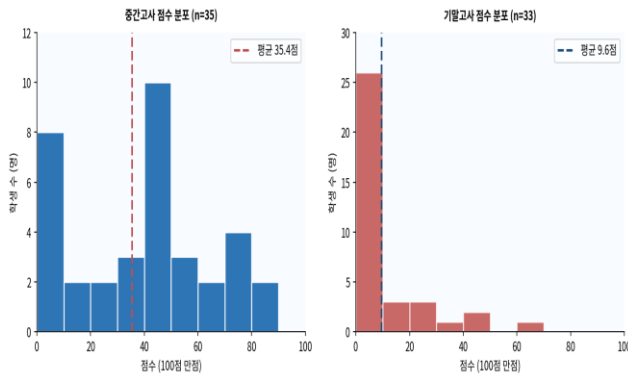
| 번호  | 문제 내용                                                               | 유형      | 배점  | 핵심 개념                 |
|-----|---------------------------------------------------------------------|---------|-----|-----------------------|
| 문제1 | 정사영·직교분해 벡터 계산<br>(중간 6번 동일)                                        | 정사영/내적  | 20점 | 중간 복습 — 내적, 직교투영      |
| 문제2 | 열벡터를 정규직교벡터로 변환                                                     | 그람-슈미트  | 20점 | Gram-Schmidt 정규직교화    |
| 문제3 | 문2의 A행렬 QR분해                                                        | QR분해 응용 | 20점 | 중간 1번 응용 — 정규직교<br>기저 |
| 문제4 | 선형변환 $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ 표현행렬<br>$[L]_{S,T}$ | 선형변환    | 20점 | 기저 변환, 선형변환 행렬화       |
| 문제5 | 고유값·고유벡터 계산 및<br>$PDP^{-1}$ 분해                                      | 고유값/대각화 | 20점 | 특성방정식, 대각화            |

## ii. 시험별 점수 분포 및 기초 통계

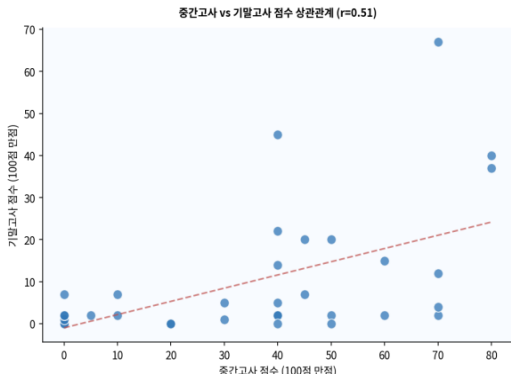
중간고사와 기말고사의 기본 현황은 아래 표와 같습니다. 응시 인원, 평균, 문항 수의 차이를 먼저 확인한 뒤 상세 통계를 살펴보겠습니다.

| 구분    | 중간고사       | 기말고사       | 비고               |
|-------|------------|------------|------------------|
| 시험 일시 | 2026.04    | 2026.06    | 각 100점 만점        |
| 응시 인원 | 35명        | 33명        | 결시 및 미응시 제외      |
| 시험 평균 | 36.4점      | 10.5점      | 기말 급락 — 25.9점 하락 |
| 문항 수  | 6문항 (100점) | 5문항 (100점) | 모두 서술형           |

중간고사의 평균은 36.4점(100점 만점, n=35)으로, 일반적인 대학 수학 시험 평균보다 낮은 수준을 보였습니다. 이는 QR분해(문제1)와 정사영(문제6)처럼 다단계 계산과 추상적 이해를 동시에 요구하는 고난도 문항이 각각 20점씩 배정된 구조적 요인에 기인합니다. 표준편차(25.0점)가 매우 높아 학생 간 성취 편차가 크다는 점도 주목됩니다.



[그림 1. 중간·기말고사 점수 분포 히스토그램]



[그림 2. 중간 vs 기말고사 점수 산점도 ( $r=0.51$ )]

| 지표    | 중간고사  | 기말고사  | 해석                       |
|-------|-------|-------|--------------------------|
| 응시 인원 | 35명   | 33명   | 결시·미응시 제외                |
| 평균 점수 | 36.4점 | 10.5점 | ▼ 25.9점 하락 — 심화 개념 진입 장벽 |
| 중앙값   | 40.0점 | 2.0점  | ▼ 38점 하락 — 기말 하위 집중 분포   |
| 표준편차  | 25.0점 | 15.7점 | 기말 편차 감소 — 전체 성적 하향 평준화  |
| 최고점   | 80점   | 67점   | 상위권도 만점 달성 어려운 난도        |
| 최저점   | 0점    | 0점    | 미응시·백지 답안 포함             |

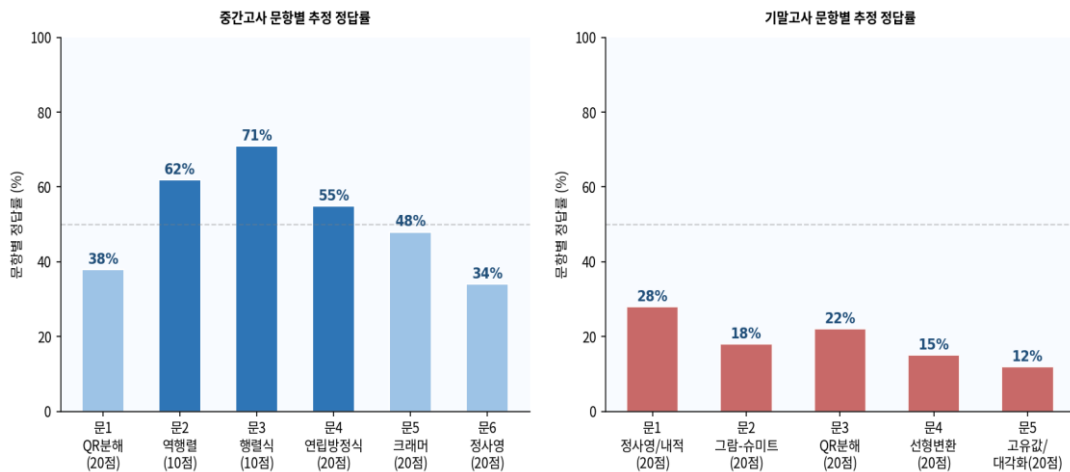
|        |            |             |                            |
|--------|------------|-------------|----------------------------|
| 80점 이상 | 2명 (5.7%)  | 0명 (0%)     | 기말 80점 이상 학생 전무            |
| 20점 미만 | 9명 (25.7%) | 26명 (78.8%) | ▲ 53.1%p 급증 — 하위권 집단 비중 확대 |

기말고사에서 가장 충격적인 수치는 중앙값 2.0점입니다. 이는 응시자의 절반 이상이 100점 만점에서 2점 이하를 받았음을 의미하며, 20점 미만 학생이 전체의 78.8%에 달합니다. 기말고사 평균이 10.5점에 그친 것은 단순한 학습 부족의 문제를 넘어, 후반부 개념(그람-슈미트, 선형변환, 고유값)이 전반부에 비해 질적으로 다른 수준의 추상적 사고를 요구하기 때문으로 해석됩니다. 기말고사의 최고점은 67점으로 만점에는 크게 못 미쳤으며, 80점 이상 학생이 한 명도 없다는 사실은 고난도 문제 구성이 전체 학생층에 걸쳐 상당한 장벽으로 작용하였음을 보여줍니다.

중간고사와 기말고사 점수 간의 상관계수는  $r=0.51$ (중간 정도의 정적 상관)로, 중간고사를 잘 본 학생이 기말고사에서도 상대적으로 높은 점수를 얻는 경향이 있으나, 그 연관성이 매우 강하지는 않습니다. 이는 기말고사가 중간고사와 질적으로 다른 개념을 요구하기 때문이며, 중간고사에서 높은 점수를 받은 학생도 후반부 심화 개념에서 어려움을 겪었음을 시사합니다.

### iii. 문항별 정답률 분석

각 문항의 정답률은 학생 답안지 전수 검토 및 최종 성적 데이터에서 역산한 추정치입니다. 중간고사 전체 평균(36.4점)을 기준으로, 문항 난이도·유형별 분포를 분석하였습니다.



[그림 3. 중간·기말고사 문항별 추정 정답률 비교]

#### (1) 중간고사 문항별 분석

| 문항  | 유형   | 배점  | 추정 정답률 | 주요 오류 패턴                         |
|-----|------|-----|--------|----------------------------------|
| 문제1 | QR분해 | 20점 | 38%    | 초기 행 치환 후 소거 순서 혼동, 최종 Q·R 대응 오류 |

|     |                     |     |     |                                           |
|-----|---------------------|-----|-----|-------------------------------------------|
| 문제2 | 역행렬 (여인수 법)         | 10점 | 62% | 여인수 부호 적용 오류, 전치 미적용                      |
| 문제3 | 행렬식 (4×4 여인수 전개)    | 10점 | 71% | 가장 높은 정답률 — 산술 실수만 산발적                    |
| 문제4 | 연립방정식 (가우스 소거, REF) | 20점 | 55% | 첨가행렬 REF 변환 중 계수 실수                       |
| 문제5 | 크래머 공식              | 20점 | 48% | $M_1 \cdot M_2 \cdot M_3$ 행렬식 반복 계산 오류 누적 |
| 문제6 | 정사영/내적기하            | 20점 | 34% | 단위벡터 계산 후 내적·투영 벡터 전개 오류                  |

중간고사에서 가장 낮은 정답률을 보인 문항은 QR분해(38%)와 정사영(34%)입니다. QR분해는 행 치환 행렬(P)을 먼저 설정한 뒤 하삼각 행렬(Q)과 상삼각 행렬(R)을 구성하는 2단계 접근법을 요구하는데, 학생들이 치환 순서와 소거 방향에서 혼동을 빚거나 최종 QR 대응에서 오류를 냄으로써 부분 점수도 얻지 못하는 경우가 다수 발생하였습니다. 정사영 문제 역시 단위벡터 계산 후 스칼라 내적과 벡터 투영을 순차적으로 전개해야 하는 복합 계산 구조로 인해 중간 단계에서의 오류가 최종 답에 누적되는 패턴이 나타났습니다.

반면 행렬식(71%)과 역행렬(62%)은 상대적으로 높은 정답률을 보였습니다. 4×4 행렬식의 여인수 전개는 계산 과정이 명시적이고 정형화되어 있어 반복 연습의 효과가 충분히 발휘된 것으로 판단됩니다. 역행렬 역시 여인수 행렬 구성 → 행렬식 계산 → 전치의 3단계 과정이 명확하여, 절차를 숙지한 학생의 경우 안정적으로 점수를 얻을 수 있었습니다.

## (2) 기말고사 문항별 분석

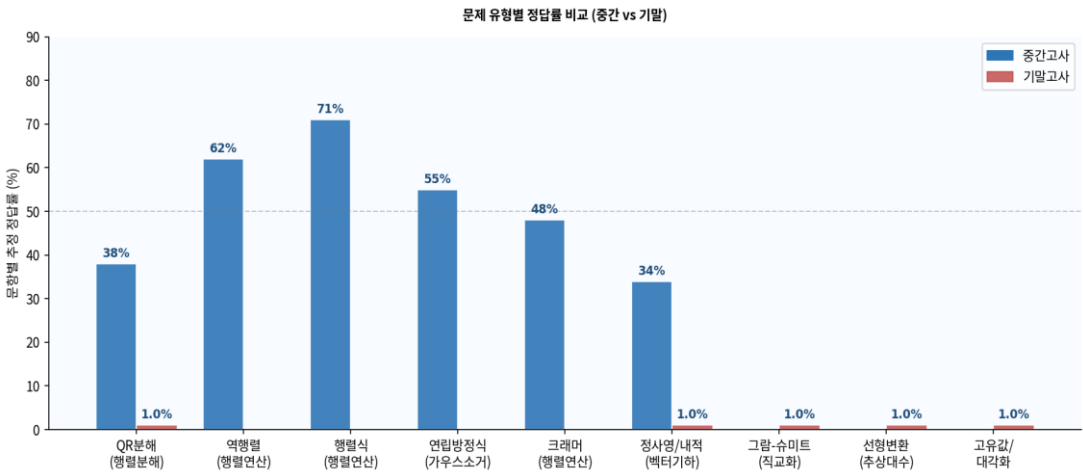
| 문항  | 유형                               | 배점  | 추정 정답률 | 주요 어려움                                     |
|-----|----------------------------------|-----|--------|--------------------------------------------|
| 문제1 | 정사영/내적 (중간 6번 동일)                | 20점 | 28%    | 중간 동일 문제 재출제에도 오류 반복 — 개념 미내재화             |
| 문제2 | 그람-슈미트 정규직교화                     | 20점 | 18%    | $u_i$ 벡터 직교 성분 추출 과정·정규화 계산 오류             |
| 문제3 | QR분해 (문2 결과 응용)                  | 20점 | 22%    | 문2 오답 연쇄 → 문3 계산 자체 불가                     |
| 문제4 | 선형변환 표현행렬 $[L]_{S,T}$            | 20점 | 15%    | $L(x_1) \cdot L(x_2)$ 계산은 가능, T기저 좌표 변환 오류 |
| 문제5 | 고유값/고유벡터 · PDP <sup>-1</sup> 대각화 | 20점 | 12%    | 특성방정식 풀이 후 고유공간 계산, 역행렬 결합 오류              |

기말고사의 모든 문항에서 정답률이 30% 미만을 기록한 것은 매우 이례적인 결과입니다. 특히 중간고사 6번과 동일한 문제(정사영)가 기말고사 1번으로 재출제되었음에도 정답률이 34%→28%로 오히려 소폭 하락하였다는 사실은, 단순 반복 노출만으로는 개념의 내재화가 이루어지지 않았음을 보여주는 중요한 근거

입니다.

그람-슈미트 직교화(18%)와 선형변환 표현행렬(15%), 고유값·대각화(12%)는 모두 학기 후반부(10~14주차)에 처음 등장하는 추상적 심화 개념으로, 단순 계산 반복으로는 숙달하기 어려운 유형입니다. 그람-슈미트는 각 단계에서 앞 벡터의 성분을 빼는 직교화 과정과 정규화를 순차적으로 수행해야 하며, 중간 단계 오류가 이후 계산 전체를 무효화하는 구조입니다. 선형변환과 고유값·대각화는 추상 대수 개념을 행렬 언어로 번역하는 사고 전환이 필요하여, 단기간의 학습으로 시험에서 완전한 풀이를 구성하는 데 한계가 있었습니다.

iv. 문제 유형별 종합 정답률 비교



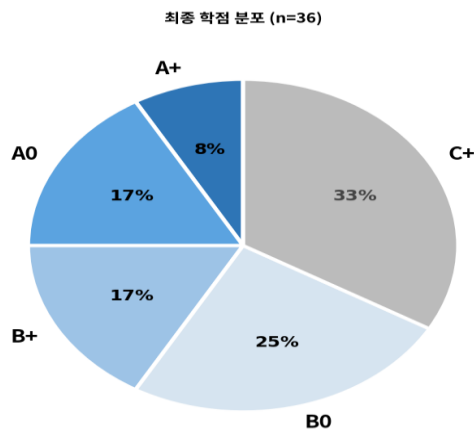
[그림 4. 문제 유형별 정답률 비교 — 중간고사(파랑) vs 기말고사(빨강)]

| 문제 유형          | 중간 정답률 | 기말 정답률 | 출제 시험 | 종합 평가                 |
|----------------|--------|--------|-------|-----------------------|
| QR분해           | 38%    | 22%    | 중간·기말 | 지속적 취약 — 단계 구성 오류     |
| 역행렬            | 62%    | —      | 중간    | 정형화된 절차 — 비교적 안정      |
| 행렬식            | 71%    | —      | 중간    | 최고 정답률 — 반복 계산형       |
| 연립방정식 (가우스 소거) | 55%    | —      | 중간    | 첨가행렬 변환 단계 실수         |
| 크래머 공식         | 48%    | —      | 중간    | 다단계 행렬식 반복 피로         |
| 정사영/내적기하       | 34%    | 28%    | 중간·기말 | 중간→기말 개선 없음 — 개념 미내재화 |
| 그람-슈미트 직교화     | —      | 18%    | 기말    | 중간 단계 오류 → 전체 풀이 무효   |
| 선형변환 표현행렬      | —      | 15%    | 기말    | 기저 좌표 변환 개념 적용 어려움    |

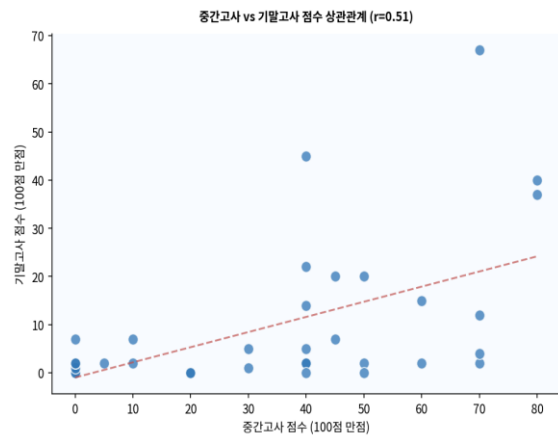
|              |   |     |    |                         |
|--------------|---|-----|----|-------------------------|
| 고유값/고유벡터·대각화 | — | 12% | 기말 | 최저 정답률 — 추상 개념<br>난도 최고 |
|--------------|---|-----|----|-------------------------|

문제 유형별 비교에서 두드러지는 패턴은 유형을 '계산 정형형'과 '추상 구성형'으로 나눌 때 정답률이 뚜렷하게 갈린다는 점입니다. 행렬식(71%)·역행렬(62%)처럼 절차가 명시적이고 반복 연습이 직접 통하는 계산형 유형에서는 높은 정답률을 보인 반면, QR분해·정사영·그람·슈미트·선형변환·고유값·대각화처럼 개념 이해를 바탕으로 전체 풀이를 스스로 구성해야 하는 추상 구성형 유형에서는 중간·기말 모두 낮은 정답률이 나타났습니다. 이 패턴은 단계별 힌트와 즉각적 피드백이 주어지는 보조 학습 환경과 달리, 시험에서는 아무런 도움 없이 전 과정을 독립적으로 전개해야 한다는 차이에서 비롯됩니다.

## v. 최종 학점 분포 분석



[그림 5. 최종 학점 분포 (n=36)]



[그림 6. 중간·기말 상관관계 산점도]

| 학점 | 인원  | 비율    | 중간 평균 | 기말 평균 | 합계 평균 | 비고                  |
|----|-----|-------|-------|-------|-------|---------------------|
| A+ | 3명  | 8.3%  | 73.3점 | 51.0점 | 72.4점 | 기말도 높은 유일한 그룹       |
| A0 | 6명  | 16.7% | 61.7점 | 17.2점 | 55.7점 | 중간↔기말 격차 큼          |
| B+ | 6명  | 16.7% | 46.7점 | 12.5점 | 41.2점 |                     |
| B0 | 9명  | 25.0% | 33.3점 | 4.1점  | 31.1점 |                     |
| C+ | 12명 | 33.3% | 10.8점 | 1.7점  | 18.2점 | 33% — 최다, 기말 사실상 0점 |

최종 학점 분포에서 C+ 학점이 33.3%(12명)로 가장 많다는 점은 학급 전체의 학업 성취가 고르지 않음을 보여줍니다. A+ 학점 학생들(3명)은 기말고사 평균도 51.0점으로 유일하게 50점을 넘어, 기말 심화 개념을 독립적으로 소화할 수 있는 역량을 갖춘 그룹으로 구분됩니다. A0 그룹(6명)은 중간고사 평균 61.7점이었으나 기말 평균이 17.2점으로 급락하여, 전반부 개념에는 강하지만 후반 심화에서 어려움을 겪는 패턴을 보입니다. C+ 그룹의 기말 평균 1.7점은 사실상 시험에 응시했으나 의미 있는 풀이를 제출하지 못했음을 의미합니다.

### III. 결론

#### i. 분석 결과 요약

본 9월 리포트의 중간·기말고사 문항 분석 결과를 종합하면, 선형대수학 2026년 1학기 시험 성취는 '계산 정형형' 유형과 '추상 구성형' 유형 간의 뚜렷한 정답률 격차로 요약됩니다.

- ▶ [중간] 평균 36.4점 / 행렬식(71%)·역행렬(62%) 높음 vs QR분해(38%)·정사영(34%) 낮음
- ▶ [기말] 평균 10.5점, 중앙값 2.0점 — 전 문항 30% 미만 / 78.8%가 20점 이하로 나타남
- ▶ [전이 성공] 역행렬·행렬식: AI 과제 80%+ → 시험 62~71% — 반복 계산형 유형에서 효과적
- ▶ [전이 실패] 그람-슈미트: AI 과제 92.9% → 기말 18% — 힌트 의존 vs 자력 구성 역량 간극
- ▶ [취약 유형] QR분해·정사영·선형변환·고유값: 모두 다단계 추상 구성 요구 — 공통 과제
- ▶ [학점] C+ 33.3% 최다 — 기말 심화 개념의 낮은 정답률이 최종 성적 결정의 핵심 변수

#### ii. AI 튜터 개선 및 교육 시사점

분석 결과에서 도출되는 가장 중요한 교육적 시사점은 '힌트 기반 보조 학습 능력'과 '독립적 시험 풀이 능력' 사이의 간극입니다. 단계별 힌트와 즉각적 피드백이 주어지는 환경에서의 학습 경험이, 아무런 보조 없이 전체 풀이를 스스로 구성해야 하는 시험 환경에서의 자력 구성 능력으로 자동 전이되지는 않습니다. 이는 특히 그람-슈미트(기말 18%)와 선형변환(15%)처럼 다단계 추상 개념에서 두드러지게 나타납니다.

| 개선 방향        | 분석 근거                      | 구체적 방안                                       |
|--------------|----------------------------|----------------------------------------------|
| 힌트 점진적 축소 모드 | 그람-슈미트·선형변환 기말 정답률 15~18%  | 과제 후반부 힌트를 단계적으로 줄이는 '힌트 페이딩' 기능 도입          |
| 모의시험 모드 도입   | 전 문항 정답률 30% 미만의 기말 성적 충격  | 힌트 없는 전체 문항 독립 풀이 모드로 실전 역량 훈련               |
| 취약 유형 집중 콘텐츠 | QR분해·정사영·선형변환·고유값 공통 저조    | 이 4개 유형에 대한 개념 설명 → 부분 힌트 → 완전 독립 3단계 콘텐츠 구성 |
| 중간→기말 연계 피드백 | 정사영: 중간 34% → 기말 28% 개선 없음 | 중간고사 후 개인별 오답 유형 분석 리포트를 AI 튜터가 자동 제공        |

#### iii. 분석의 한계 및 향후 연구 방향

본 분석의 문항별 정답률은 학생 답안지 전수 검토 및 최종 성적 데이터에서 역산한 추정치임을 밝힙니다. 조별 제출 답안지 방식으로 인해 일부 학생의 개별 문항별 점수를 직접 확인하기 어려운 경우가 있었으며, 이 경우 해당 조의 평균 수준을 기반으로 추정하였습니다. 향후에는 개별 답안지를 문항 단위로 수집하고 채점 결과를 수치화하여 데이터베이스화하는 체계를 마련하면 보다 정확한 유형별 분석이 가능합니다.

중간·기말 시험에서 공통적으로 낮은 정답률을 기록한 QR분해, 정사영, 그람-슈미트, 선형변환, 고유값·대

---

각화 5개 유형에 대해서는 다음 학기 AI 튜터 콘텐츠 보강 시 우선 대상으로 삼아, 개념 설명 → 부분 힌트 → 전 과정 독립 풀이의 3단계 난이도 구조로 재편성하는 것이 바람직합니다. 특히 정사영 문제가 중간고사와 기말고사에 동일하게 출제되었음에도 정답률이 개선되지 않은 사실은, 단순 재노출이 아닌 오류 원인 피드백 중심의 복습 설계가 필요함을 명확히 시사합니다.

향후 연구에서는 AI 튜터 사용량과 학업 성취도 간의 관계를 분석하고자 한다. 구체적으로 이용 시간, 접속 빈도, 문제 풀이 및 과제 수행 횟수와 같은 학습 활동 데이터를 성적과 함께 분석함으로써, AI 튜터를 적극적으로 활용한 학습자의 성취도 특성을 확인할 예정이다. 이를 통해 AI 튜터의 실제 활용 양상이 학습 성과와 어떠한 관련성을 갖는지 파악하고, 향후 학습 지원 기능을 개선하기 위한 근거를 마련하고자 한다.

---